UAlg FCT
UNIVERSIDADE DO ALGARVE
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Campus de Gambelas - Edifício 8 - 8005-139 Faro - Portugal
Tel.: +351 289 800 953 - Fax: +351 289 800 066
fct@ualg.pt - www.fct.ualg.pt

Report

on

PhD Thesis

by

Aidos Ganizhanuly Shakir

with the title

Inverse and direct problems for nonlinear Kelvin-Voigt equations

in the area

8D05401 – Mathematics

The PhD work by Aidos Shakir was devoted to the study of inverse and direct problems for nonlinear Kelvin-Voigt equations. Kelvin-Voigt equations, today best known as Navier-Stokes-Voigt equations, is an emerging area of research in the field of Mathematical Fluid Mechanics, as evidenced by the more than 800 works published in the last 5 years (according to MathSciNet). Aidos Shakir's PhD Thesis is divided into 4 main chapters (Chapters 4-7), in addition to introductory and concluding chapters. Chapter 1 is about normative references, in Chapter 2 the candidate writes the introduction to his work, in Chapter 3 the candidate collects some auxiliary results that shall be used in the sequel, whereas in Chapter 8 the candidate writes the conclusions to his work. Chapters 4 to 7, which contain the main results of this work, will be outlined below.

In Chapter 4, the candidate studies the following Navier-Stokes-Voigt problem with memory term,

$$(1) \qquad u_t + (u\cdot\nabla)u = f(t)g - \nabla p + \nu\Delta u + \kappa\Delta u_t + \int_0^t K(t-s)\Delta u(s)\,ds \qquad \text{in} \quad Q_T,$$

$$(2) \qquad \operatorname{div} u = 0 \qquad \text{in} \quad Q_T,$$

$$(3) \qquad u = u_0 \qquad \text{in} \quad \Omega\times\{0\},$$

$$(4) \qquad u = 0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_T,$$

where $Q_T = \Omega\times[0,T]$, being $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$, a bounded domain, with its boundary denotes by $\partial\Omega$, and $\Gamma_T = \partial\Omega\times[0,T]$. The used notation is the following: $(u_1,\dots,u_d)$ is the velocity field, p is the pressure, ν is the kinematics viscosity, κ is the relaxation time, the kernel K of the memory term $\int_0^t K(t-s)\Delta u(s)ds$ represents a physical property related with the non-Newtonian character of the fluid, and the function f describes the intensity of the forces field g. The presence of both the memory term and the relaxation term in the momentum equation (1) makes this equation of hyperbolic type. In this chapter, the candidate considers the following overdetermination condition

$$(5) \qquad \int_\Omega u(t)\cdot\omega\,dx = e(t), \qquad t\in[0,T],$$

where $e(t)$ accounts for a measurement data representing the average velocity on the domain Ω, and ω is a given function representing the type of device used to measure the velocity. For all the problems resulting from the combination of the equations (1)-(4) with the overdetermination condition (5), the candidate establishes the existence and uniqueness of weak solutions, as well the existence of strong solutions.

In Chapter 5, the candidate proceeds with the study of the problem (1)-(4), but subjected now to the following overdetermination condition

$$\int_\Omega u(t)\cdot\omega + \kappa\nabla u(t) : \nabla\omega dx = e(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{6}$$

In this case, the candidate also establishes the existence and uniqueness of weak solutions for the associated problems. The issue of existence of strong solutions for these problems, is also analyzed by the candidate her

Chapter 6 is devoted to the study of an inverse source/sink problem for a nonlinear pseudoparabolic equation with p-Laplacian diffusion and damping term, described by the following system of equations

$$u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \gamma |u|^{\sigma-2}u + f(t)g \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{7}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{8}$$

$$u(x,0) = u_0 \quad \text{on} \quad \{0\}\times\Omega, \tag{9}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_T. \tag{10}$$

In this chapter, the local and global in time existence and the uniqueness of the weak solutions to the problem (7)-(10) is proven under an overdetermination condition of the type (6). The candidate consider, in this chapter, the case of a source, with $\gamma > 0$ in the r.h.s. of (7), as well the case of a sink that corresponds to $\gamma < 0$ in the r.h.s. of (7).

In Chapter 7, the candidate studies an initial-and boundary value that describes density-dependent flows of viscous fluids with elastic properties. The problem is governed by the following nonhomogeneous Navier-Stokes-Voigt system

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \rho f - \nabla p + \mu\Delta u + \kappa\Delta u_t \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{11}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{12}$$

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \qquad \rho \geq 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{13}$$

$$\rho u = \rho_0 u_0, \qquad \rho = \rho_0 \quad \text{in} \quad \{0\}\times\Omega, \tag{14}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_T. \tag{15}$$

The main novelty of this chapter is the hypothesis that, in some subdomain of space, there may be a vacuum at the initial moment, that is, the possibility of the initial density vanishing in some part of the space domain. For the associated nonlinear initial-and boundary-value problem (11)-(15), the candidate proves the global-in-time existence of strong solutions (velocity, density and pressure). It is also establish some other regularity properties of these solutions and are found conditions that guarantee the uniqueness of velocity and density.

The Navier-Stokes-Voigt equations studied by the candidate in this thesis govern incompressible fluid flows with elastic properties under different flow conditions. Therefore, this thesis constitutes an important contribution to state of the art in the area of Mathematical Fluid Mechanics. The diversity and complexity of the mathematical problems studied in this thesis show that the candidate has a good command of Functional Analysis techniques that allow him to study these problems from the point of view of Mathematical Analysis. To study these problems, the candidate also had to understand very well the modeling of the original Fluid Mechanics problems and how to obtain these systems of equations from the Classical Principles of Mechanics.

Most of the work that gave rise to this thesis has been published, or is in the process of being published, in Scopus Q1 or Q2 quartile journals. I am aware that the candidate has also presented his work at several renowned scientific meetings, both in Kazakhstan and abroad. Moreover, from March to May 2023 the candidate completed an internship at

University of the Algarve, Portugal, under my guidance. During this period, the candidate has began new work that is still in progress and is not contained in this thesis. This shows that the candidate sees the PhD as the beginning of his research career and not as an end just to fulfill some academic requirements. For all this, I am of the opinion that the candidate Aidos Ganizhanuly Shakir is worthy of the title of Doctor of Philosophy in Mathematics.

UNIVERSIDADE DO ALGARVE
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

12/10/2023

Логотип/Алгарве Университеті/ Ғылым және технология факультеті
Гамбелаш корпусы-8 ғимарат/ 8-8005-139/ Фару, Португалия
Тел:+351 289 80 953- Факс: +351 289 800 066
почта: fct@ulag.pt/ сайт: www.fct.ulag.pt

Пікір

Үміткер: Шәкір Айдос Ғанижанұлы

PhD диссертация тақырыбы: Сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеулері үшін кері және тура есептер

Мамандық: 8D05401 – Математика

Шәкір Айдостың PhD диссертациялық жұмысы Кельвин-Фойгт теңдеулері үшін қойылған кері және тура есептерді зерттеуге арналған. Кельвин-Фойгт теңдеулері бүгінгі таңда Навье-Стокс-Фойгт теңдеулері деген атпен белгілі. Бұл сұйықтар механикасының математикасы саласындағы жаңа бағыт болып табылады, оған соңғы 5 жылда 800 астам жұмыстың жарқ көруі дәлел бола алады (MathSciNet мәліметі бойынша). Шәкір Айдостың PhD диссертациялық жұмысы негізгі 4 бөлімнен (4-7 бөлімдер), сондай-ақ, кіріспе және қорытынды бөлімдерден тұрады. Үміткер 1-бөлімде нормативтік сілтемелерді келтіріп, 2-бөлімде диссертациялық жұмысқа кіріспе жазып, ал 3-бөлімде негізгі көмекші нәтижелерге тоқталып, соңғы 8-бөлімде диссертациялық жұмысты қорытындымен түйіндейді. Төменде диссертациялық жұмыстың негізгі 4-7 бөлімдеріне сипаттама беріледі.

4-бөлімде үміткер интегро-дифференциалдық Навье-Стокс-Фойгт теңдеулері үшін келесі есепті қарастырады

(1) $$u_t + (u\cdot\nabla)u = f(t)g - \nabla p + \nu\Delta u + \kappa\Delta u_t + \int_0^t K(t-s)\Delta u(s)\,ds, \qquad (\mathbf{x},t)\in Q_T,$$

(2) $$\operatorname{div} u = 0, \qquad (\mathbf{x},t)\in Q_T,$$

(3) $$u = u_0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega\times\{0\},$$

(4) $$u = 0, \qquad (\mathbf{x},t)\in\Gamma_T,$$

мұндағы $Q_T = \Omega\times[0,T]$ цилиндрлік облыс, ал $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$ шенелген облыс және $\partial\Omega$ оның шекарасы, сонымен бірге $\Gamma_T = \partial\Omega\times[0,T]$ цилиндрдің бүйір беті, сонымен қатар $(u_1,\dots,u_d)$ сұйықтың жылдамдығын, p сұйықтың қысымын, ν кинематикалық тұтқырлықты, κ сұйықтың релаксация уақытын және $\int_0^t K(t-s)\Delta u(s)ds$ қосылғышындағы K өзегі сұйықтардың ньютондық емес қасиетін, ал g сыртқы күштер өрісіндегі f функциясы интенсивтілікті сипаттайды. Ескерер жайт, (1) импульс теңдеуінде интегралдық және релаксациялық қосылғыштың болуы импульс теңдеуін гиперболалық типті теңдеуге айналдырады. Бұл бөлімде үміткер келесі интегралдық қосымша шартты қарастырады,

(5) $$\int_\Omega u(t)\cdot\omega\,dx = e(t), \qquad t\in[0,T],$$

мұндағы $e(t)$ функциясы Ω облыс бойынша орташа жылдамдықты және ω жылдамдықты өлшеуге арналған құрылғының типін білдіреді. Бұл бөлімде үміткер (1)-(4) теңдеулердің (5) қосымша шартпен комбинациясы арқылы кері есепті алып, оның әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуын және жалғыздығын дәлелдеген.

5-бөлімде үміткер (1)- (4) теңдеулердің

$$\int_\Omega u(t)\cdot\omega + \kappa\nabla u(t):\nabla\omega\,dx = e(t), \qquad t\in[0,T]. \tag{6}$$

қосымша шартпен комбинациясы арқылы кері есеп қарастырып, оның да әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуын және жалғыздығын тұжырымдаған.

5-бөлімде үміткер оң жағы сызықты емес мүшелі p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін кері есепті қарастырады, оның қойылымы келесі түрге ие

$$u_t - \Delta u_t - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \gamma|u|^{\sigma-2}u + f(t)g \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{7}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{8}$$

$$u(x,0) = u_0 \quad \text{on} \quad \{0\}\times\Omega, \tag{9}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_T. \tag{10}$$

Бұл бөлімде (6) қосымша шартпен қойылған (7)-(10) есептің әлсіз шешімінң уақыт бойынша локалды және глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелденеді. Айта кету керек, үміткер оң жақтағы сызықты мүшенің $\gamma > 0$ кезде жылу көзі болған жағдайды, сондай-ақ $\gamma < 0$ болған кезде абсорбция болған жағдайды қарастырған.

7-бөлімде диссертант біртекті емес эластикалық қасиеттерге ие сұйықтар үшін Навье-Стокс-Фойгт теңдеулер жүйесіне қойылған келесі бастапқы-шеттік қарастырады

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u\otimes u) = \rho f - \nabla p + \mu\Delta u + \kappa\Delta u_t \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{11}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{12}$$

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \qquad \rho \ge 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{13}$$

$$\rho u = \rho_0 u_0, \qquad \rho = \rho_0 \quad \text{in} \quad \{0\}\times\Omega, \tag{14}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_T. \tag{15}$$

Бұл бөлімде кеңістіктің кейбір ішкі облыстарында бастапқы тығыздықтың нөлге тең кезінде ғана мүмкін болатын бастапқы импульс моментінің вакуумге айналу жағдайы негізгі ерекшелік екенін айтуға болады. Үміткер (11)-(15) сызықты емес есеп үшін әлді шешімнің (жылдамдық, тығыздық және қысым) уақыт бойынша глобалды бар болуы дәлелдеген. Сонымен қатар, әлді шешімдердің кейбір регуляр қасиеттері мен жалғыздығына кепілдік беретін шарттар орнатылады.

Үміткер эластикалық қасиеттерге ие сығылмайтын сұйықтықтардың қозғалысын сипаттайтын Навье-Стокс-Фойгт теңдеулерін әр түрлі ағын жағдайында зерттеген. Сондықтан да бұл диссертациялық жұмыстың нәтижелері заманауи сұйықтықтар механикасы теориясына үлесі үлкен болып табылады. Осы диссертациялық жұмыста зерттелген математикалық есептердің әртүрлілігі мен күрделілігі үміткердің қарастырылған есептерді математикалық талдау тұрғысынан зерттеуге мүмкіндік беретін функционалдық талдау әдістерін жақсы меңгергенін көрсетеді. Сонымен бірге, бұл есептерді зерттеуде үміткерге сұйықтар механикасының теңдеулерін модельдеуді және механиканың классикалық принциптерінен осы теңдеулер жүйесін алу жолын өте жақсы түсінуі керек болды.

Бұл диссертациялық жұмыстың нәтижелері басым бөлігі Scopus базасындағы Q1 немесе Q2 квартилді журналдарында жарияланған немесе жариялану үстінде. Үміткер өз жұмысының нәтижелерімен Қазақстанда да, шетелде де бірнеше атақты ғылыми конференцияларда ұсынылып, талдау өтті. Сонымен қатар, үміткер 2023 жылдың наурызынан мамырына дейін менің жетекшілігіммен Португалиядағы Алгарве университетінде тағылымдамадан өтті. Осы кезеңде кандидат әлі де аяқталмаған және осы диссертациялықк жұмыста қамтылмаған жаңа есепті бастады. Бұл үміткердің PhD дәрежесін кейбір академиялық талаптарды орындау үшін емес өзінің ғылыми мансабының басы ретінде қарастыратынын көрсетеді. Осының барлығы үшін диссертант Шәкір Айдос Ғанижанұлы математика мамандығының философия докторы атағына лайық деген пікірдемін.

Қолы және мөр бар

16.10.2023

Мен, **Кенжетаева Диана Серикболовна**, ИИН 890416450513, (төл құжат № 037494459, Қазақстан Республикасының Ішкі Істер Министрлігімен, 02.02.2015 жылы берілген, 01.02.2025 жылға дейін жарамды), бұл құжат түпнұсқалығына сәйкестігін және дұрыс аударғандығына қолымды қойып растаймын.

Қолы...Кенжетаева Диана Серикболовна...

ИП «TRANSLATION SERVICES PRO»
ЖСН/ИИН 890416450513
Кенжетаева Диана
Аудармашы/Переводчик
Сот: +7 747 580 89 48

он алтыншы қазан 2023 жыл, мен **Мусатаева Айгерим Максатовна**, Қазақстан Республикасы Әділет министрлігінің берілген №21015147-саны 15 сәуірде 2021 жылы лицензиясының негізінде әрекет жасаушы Алматы қаласы нотариусы аудармашының **Кенжетаева Диана Серикболовна** қолының түпнұсқалығын куәландырамын. Аудармашының жеке басы анықталды, әрекет қабілеттілігі және өкілеттілігі тексерілді.

Тізілімде № 6988 тіркелді

Өндірілді

Нотариус

Нөмірленген және баулықталған 6 парақ

Нотариус

ET4907106231016140645E57809F

Нотариаттық іс-әрекеттің бірегей нөмірі / Уникальный номер нотариального действия